Révisions & Oraux ; Série N°5

Exercice 1 1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction $\frac{1}{X(X^2-1)^2}$.

2. Nature de la série $\sum u_n$, où $u_n = \frac{an^2+5}{n^3-10n+13}$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}$ et E l'ensemble des suites complexes telles que $\forall n,\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel, et déterminer, en justifiant, sa dimension.

Exercice 3 [ENSEA PSI] Soit A une matrice dont les quatre coefficients sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Calculer la probabilité que A soit inversible, puis que A soit de rang 1.

Exercice 4 [Navale MP] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang}(f - \mathrm{id}) = \dim E$.

Exercice 5 [Centrale PSI] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\cosh \lambda)$.

1. Soit Z une variable aléatoire. Montrer que $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(Z \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbf{E}(e^{\lambda Z})$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq 0) \geq 1/2$.
3. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{n}\ln \mathbf{P}(S_n \geq t) \leq \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t,\ \lambda \geq 0\}$.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Considérons l'équation différentielle $(E)\colon x^2y' + y + x^2 = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que (E) admet une unique solution qui admet une limite finie en 0.
2. Existe-t-il des solutions de (E) admettant une limite finie en $+\infty$?

Exercice 7 [Mines MP] Soit $n \geq 1$ et $x_1 < y_1 < \ldots < x_n < y_n$ des réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que si $\forall i,\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 8 [Mines MP 2024] Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I est la différence deux fonctions convexes.

Exercice 9 [Mines MP 2024] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Comparer $\mathbf{E}(X^\alpha)$ et $\mathbf{E}(X)^\alpha$.

Exercice 10 [X MP 2024] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 11 [X MP 2024] Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :

(i) f n'est pas polynomiale,

(ii) $\operatorname{Vect}\left(\{x \mapsto f(\alpha x + \beta)\ ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Révisions & Oraux ; Série N°5

Exercice 1 1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction $\frac{1}{X(X^2-1)^2}$.

2. Nature de la série $\sum u_n$, où $u_n = \frac{an^2+5}{n^3-10n+13}$.

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{C}$ et E l'ensemble des suites complexes telles que $\forall n,\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel, et déterminer, en justifiant, sa dimension.

Exercice 3 [ENSEA PSI] Soit A une matrice dont les quatre coefficients sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Calculer la probabilité que A soit inversible, puis que A soit de rang 1.

Exercice 4 [Navale MP] Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rang} f + \operatorname{rang}(f - \mathrm{id}) = \dim E$.

Exercice 5 [Centrale PSI] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\Psi(\lambda) = \ln(\cosh \lambda)$.

1. Soit Z une variable aléatoire. Montrer que $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(Z \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbf{E}(e^{\lambda Z})$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \geq 0) \geq 1/2$.
3. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{n}\ln \mathbf{P}(S_n \geq t) \leq \inf\{\Psi(\lambda) - \lambda t,\ \lambda \geq 0\}$.

Exercice 6 [Mines MP 2024] Considérons l'équation différentielle $(E)\colon x^2y' + y + x^2 = 0$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que (E) admet une unique solution qui admet une limite finie en 0.
2. Existe-t-il des solutions de (E) admettant une limite finie en $+\infty$?

Exercice 7 [Mines MP] Soit $n \geq 1$ et $x_1 < y_1 < \ldots < x_n < y_n$ des réels.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que si $\forall i,\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \int_{x_i}^{y_i} P(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 8 [Mines MP 2024] Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$. Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I est la différence deux fonctions convexes.

Exercice 9 [Mines MP 2024] Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Comparer $\mathbf{E}(X^\alpha)$ et $\mathbf{E}(X)^\alpha$.

Exercice 10 [X MP 2024] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 11 [X MP 2024] Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :

(i) f n'est pas polynomiale,

(ii) $\operatorname{Vect}\left(\{x \mapsto f(\alpha x + \beta)\ ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}\right)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.